

非ニュートン流体の平行円板間の層流放射流れ

立 花 規 良^{*}

Laminar Radial Flow of Non-Newtonian Fluid between Parallel Stationary Disks

Motoyoshi TACHIBANA

(Received Oct. 2, 1972)

The laminar radial flow between the parallel stationary disks is one of the basic flows in the hydrodynamics and it is applicable to the viscometry or the rheometry. Then, the above-mentioned flow of non-Newtonian fluid is discussed analytically and the inertia-and the cross viscosity-effects to the pressure distribution on the disk are considered numerically. In this paper, it was assumed that the fluid was such a non-Newtonian one that its constitutive equation was expressed by Reiner-Rivlin model (power law type).

1 緒 言

平行円板間の放射流れは、その幾何学的単純さと工学的応用性（例えば、粘度計⁽¹⁾、円板弁、空気マイクロメータ、など）のために、種々の理論的解析がなされてきた^{(2)~(7)}。今、流れを層流に限定すると、流体の流動特性の解明への応用、すなわち、粘度計ないしはレオメータとしての用途、が注目に値する。Gümbel は⁽¹⁾、1920年、この種の流れを利用した粘度計を作成し、ニュートン流体の粘度を決定し、この方面の口火を切ったが、円板間のすきまに関連した困難さのために、その後は、著しい発達は見られなかった。しかし、近年、複雑な流動特性を示す各種流体の出現と共に再考され、Schwarz らは⁽⁸⁾、非ニュートン流体（単純流体の三次近似モデル）の流動特性パラメータの決定に、ラジアルフロー粘度計を用い、その基礎的特性をあきらかにし、その効用を指摘した。

本論文では、非ニュートン流体の構成方程式として、Reiner-Rivlin のものを考え、この種流体が、平行円板間を層流状態で放射流れするときの問題を、解析的に検討し、円板に生ずる圧力分布への慣性と交差粘性の効果について考察する。

2 基 礎 式

本解析では、次のような仮定が成立するものとする。

- (1) 流体は、非圧縮性である。
- (2) 流れは、定常層流で、放射状である。

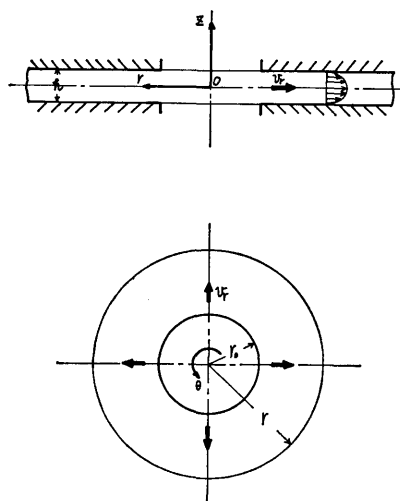


図1 座標と流れ

^{*} 機械工学科

- (3) 外力は、働かない。
 (4) 二円板（内半径 r_0 ）壁上の流速は零である。
 (5) 二円板間の入口（助走）および出口効果は、無視できる。
 (6) 流体は、Reiner-Rivlin 流体で、その未定関数 η および η_c は、

$$\eta = \eta_0 \left| \frac{1}{2} \mathbf{I}_2 \right|^{\frac{n-1}{2}}, \quad \eta_c = \eta_{c0} \left| \frac{1}{2} \mathbf{I}_2 \right|^{\frac{m-1}{2}} \quad \dots\dots\dots(1)$$

η_0, η_{c0}, n, m は定数

とあらわされる。

今、平行な二円板が、図1のように配置され、円筒座標系 (r, θ, z) が図示ごとく定義されるものとする。

非圧縮性流体の連続の式は、一般に、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

とあらわされるが、速度成分は、仮定(2), (5)より、

$$v_r = v_r(r, z), \quad v_\theta = 0, \quad v_z = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

となり、これを、式(2)に入れると、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0, \quad \frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{v_r}{r} \quad \dots\dots\dots(4)$$

となる。さらに、積分し、変形すると、

$$v_r = \frac{F(z)}{r} \quad \dots\dots\dots(5)$$

と関数表示されることがわかる。

次に、運動方程式は、一般に

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right] \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right] + \rho g_r \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(6 \cdot 1)$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right] + \rho g_\theta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(6 \cdot 2)$$

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] + \rho g_z \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(6 \cdot 3)$$

とあらわされる⁽⁹⁾が、仮定(2), (3)および式(3)を考慮に入れると

$$\left. \begin{aligned} \rho \left[v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right] \\ 0 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right] \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(7)$$

となる。

さらに、Reiner-Rivlin 流体の構成方程式は、一般に、

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \eta \mathbf{A} + \frac{1}{2} \eta_c \{ \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \} \\ \eta &= \eta(I_2, I_3), \quad \eta_c = \eta_c(I_2, I_3) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(8)$$

で与えられる⁽⁹⁾。式(8)中の \mathbf{A} の各成分は、式(3)より

$$\left. \begin{aligned} A_{rr} &= 2 \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad A_{\theta\theta} = 2 \frac{v_r}{r} = -2 \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad A_{zz} = 0 \\ A_{r\theta} &= A_{\theta r} = 0, \quad A_{\theta z} = A_{z\theta} = 0, \quad A_{rz} = A_{rz} = \frac{\partial v_r}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(9)$$

となる。不変量 $I_i (i: 1, 2, 3)$ は,

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= 0 \\ I_2 &= 4 \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{v_r}{r} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 = 8 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \\ I_3 &= -2 \left(\frac{v_r}{r} \right) \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 = 2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(10)$$

となる。この流れでは、一般に、 $I_3 \neq 0$ であることが見出される。 I_3 の効果については、式(10)より検討することができる。すなわち、

$$\frac{I_3}{I_2^{3/2}} = \frac{2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2}{\left[8 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) / \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)}{\left[1 + 4 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 / \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \right]}$$

未定関数 η および η_c において、 I_3 の効果が I_2 の効果に対し省略しうするためには、

$$\text{仮定 (7)} \quad \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \ll \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)$$

でなければならないことがわかる。この条件が容認しうるものとみなし、 η および η_c においては、 I_3 を独立変数から除外する。すなわち、

$$\eta = \eta(I_2), \quad \eta_c = \eta_c(I_2)$$

さらに、 I_2 の関数形としては、式(1)のようなべき関数表示されるものとする。仮定(7)より、 I_2 は、

$$I_2 = 8 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 = 2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \left[1 + 4 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 / \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \right] \simeq 2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \quad \dots\dots\dots(10)'$$

となり、式(1)は、

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \eta_0 \left| \frac{1}{2} I_2 \right|^{\frac{n-1}{2}} = \eta_0 \left[4 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \simeq \eta_0 \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^{n-1} \\ \eta_c &= \eta_{c0} \left| \frac{1}{2} I_2 \right|^{\frac{m-1}{2}} = \eta_{c0} \left[4 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{m-1}{2}} \simeq \eta_{c0} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^{m-1} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(1)'$$

となる。応力成分は式、(8)、(9)、(1)'より

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rr} &= 2\eta_0 \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \eta_{c0} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^{m+1}, \quad \tau_{\theta\theta} = -2\eta_0 \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^{n-1} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right), \\ \tau_{zz} &= \frac{1}{2} \eta_{c0} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^{m+1}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0, \quad \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = 0, \\ \tau_{rz} &= \tau_{rz} = \eta_0 \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^n + \eta_{c0} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^m \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(11)$$

となる。これらを、式(7)に代入すると、

$$\begin{aligned} \rho \left[v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right] &= - \frac{\partial p}{\partial r} + 2\eta_0 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right\} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^{n-1} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^n \right\} \right] + \frac{1}{2} \eta_{c0} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^{m+1} \right\} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^m \cdot \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(12 \cdot 1)$$

$$0 = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad \dots\dots\dots(12 \cdot 2)$$

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^n \right\} + \frac{1}{2} \eta_{c0} \left[2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^m \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^{m+1} \right\} \right] \quad \dots\dots\dots(12 \cdot 3)$$

をうる。式 (12・2) より、

$$p = p(r, z) \quad \dots\dots\dots(13)$$

であることがわかる。さらに、式(5)を式(12)に代入すると、

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{F^2}{r^3} + 2\eta_0 \left[(n-1) \frac{F \cdot (F')^{n-1}}{r^{n+2}} + \frac{n}{2} \frac{(F')^{n-1} \cdot F''}{r^n} \right] - \frac{1}{2} \eta_{co} \left[\frac{(m+2) \cdot (F')^{m+1} + 2mF \cdot (F')^{m-1} \cdot F''}{r^{m+2}} \right] \quad \dots\dots\dots(14 \cdot 1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -(n-1)\eta_0 \frac{(F')^n}{r^{n+1}} + \frac{m+1}{2} \eta_{co} \left[2 \frac{F \cdot (F')^m}{r^{m+3}} + \frac{(F')^m \cdot F''}{r^{m+1}} \right] \quad \dots\dots\dots(14 \cdot 2)$$

をうる。式(14・1)を z で、式(14・2)を r で微分し、等置整理すると、

$$2\rho \frac{F \cdot F'}{r^3} + \eta_0 \left[(n-1)^2 \cdot \frac{2F \cdot (F')^{n-2} \cdot F'' - (F')^n}{r^{n+2}} + n \cdot \frac{(n-1)(F')^{n-2} \cdot (F'')^2 + (F')^{n-1} \cdot F'''}{r^n} \right] - \frac{1}{2} \eta_{co} \left[\frac{2m(m-1)F \cdot (F')^{m-2} \cdot (F'')^2 + 2mF \cdot (F')^{m-1} \cdot F''' + (3m+1)(F')^m \cdot F''}{r^{m+2}} - 2(m+1)(m+3) \frac{F \cdot (F')^m}{r^{m+4}} \right] = 0 \quad \dots\dots\dots(15)$$

をうる。ここで、'記号は、 z に関する微分を意味する。

式(15)を満足する $F(z)$ を見出し、境界条件から定数を決定すれば、問題は解かれたことになる。

3 基礎式の解

式(15)は、 n および m が一般には正の実数であるので、 r に対し同次とならず、解は存在しない。いくつかの特別な場合につき考える。

3・1 $\rho=0$

これは、運動方程式において慣性項を省略した場合に対応し、流れが十分おそいときには、この近似は有効である。式(15)は、

$$\eta_0 \left[(n-1)^2 \cdot \frac{2F \cdot (F')^{n-2} \cdot F'' - (F')^n}{r^{n+2}} + n \cdot \frac{(n-1)(F')^{n-2} \cdot (F'')^2 + (F')^{n-1} \cdot F'''}{r^n} \right] - \frac{1}{2} \eta_{co} \left[\frac{2m(m-1)F \cdot (F')^{m-2} \cdot (F'')^2 + 2mF \cdot (F')^{m-1} \cdot F''' + (3m+1)(F')^m \cdot F''}{r^{m+2}} - 2(m+1)(m+3) \frac{F \cdot (F')^m}{r^{m+4}} \right] = 0 \quad \dots\dots\dots(16)$$

となる。この方程式は、任意の n 、 m に対し、解をもたない。

3・2 $\eta_{co}=0$

これは、流体が指数則モデルに従う場合で式、(15)は、

$$2\rho \frac{F \cdot F'}{r^3} + \eta_0 \left[(n-1)^2 \frac{2F(F')^{n-2} \cdot F'' - (F')^n}{r^{n+2}} + n \frac{(n-1)(F')^{n-2} \cdot (F'')^2 + (F')^{n-1} \cdot F'''}{r^n} \right] = 0 \quad \dots\dots\dots(17)$$

となる。この方程式は、任意の n に対し解けない。

3・2・1 $n=1$

これは、ニュートン流体に対応し、式(17)は、

$$2\rho \frac{F \cdot F'}{r^3} + \eta_0 \frac{F'''}{r} = 0 \quad \dots\dots\dots(17')$$

と単純な形となるが、 r に対し同次でないので、解は存在しない。

3・2・2 $\rho=0$

これは、指数則流体の十分おそい流れ（慣性項の省略）の場合で、式(17)は、

$$(n-1)^2 \cdot \frac{2F(F')^{n-2} \cdot F'' - (F')^n}{r^{n+2}} + n \frac{(n-1)(F')^{n-2} \cdot (F'')^2 + (F')^{n-1} \cdot F'''}{r^n} = 0 \quad \dots\dots\dots(17)''$$

となる。任意の n に対し、解は存在しないが、 $n=1$ 、すなわち、ニュートン流体では、

$$F''' = 0 \quad \dots\dots\dots(17)'''$$

となり、解が存在する。すなわち、

$$F = F_0 + F_1 z + F_2 z^2, \quad F_0, F_1, F_2: \text{定数} \quad \dots\dots\dots(18)$$

このとき、速度 v_r は、式(5)より、

$$v_r = \frac{F(z)}{r} = \frac{F_0 + F_1 z + F_2 z^2}{r} \quad \dots\dots\dots(19)$$

となり、境界条件

$$\left. \begin{array}{l} z = \pm h/2 \quad \text{で, } v_r = 0 \\ z = 0 \quad \text{で, } \frac{\partial v_r}{\partial z} = 0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(20)$$

より、

$$F_1 = 0, \quad F_0 = -F_2(h/2)^2$$

となるゆえ

$$v_r = \frac{F_2}{r} \left[z^2 - \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right] \quad \dots\dots\dots(21)$$

さらに、 F_2 については、観測量である流量 Q で置きかえる。すなわち、 Q は、

$$Q = 2 \int_0^h 2\pi r v_r dz = 4\pi \int_0^h F_2 \left[z^2 - \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right] dz = -\frac{1}{3} \pi h^3 F_2$$

となるゆえ

$$F_2 = -\frac{3Q}{\pi h^3}$$

これより、式(20)は

$$v_r = \frac{3Q}{4\pi r h} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right] = \frac{3}{2} v_m \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^2 \right], \quad v_m \equiv \frac{Q}{2\pi r h} \quad \dots\dots\dots(22)$$

となり、速度分布は、任意断面 (r = 一定) で、放物線状であることがわかる。

3・3 $\rho=0, n=1$

これは、流れが十分おそく (慣性項省略)、粘性挙動がニュートン性であるときに対応し、交差粘性の影響の検討が可能である。式(5)は、

$$\eta_0 \frac{F'''}{r} - \frac{1}{2} \eta_{co} \left[\frac{2m(m-1)F \cdot (F')^{m-2} \cdot (F'')^2 + 2mF \cdot (F')^{m-1} \cdot F''' + (3m+1)(F')^m \cdot F''}{r^{m+2}} - 2(m+1)(m+3) \frac{F \cdot (F')^m}{r^{m+4}} \right] = 0 \quad \dots\dots\dots(23)$$

となる。この方程式は、任意の m に対しては解が存在しないが、 $m = -1$ (物理的な拘束条件 $m > 0$ に抵触する) のときには、

$$\eta_0 \frac{F'''}{r} - \frac{1}{2} \eta_{co} \left[\frac{4F \cdot (F')^{-2} (F'')^2 - 2F(F')^{-2} F''' - 2(F')^{-1} \cdot F''}{r} \right] = 0$$

で、整理すると、

$$F'''(F')^3 + kF''' \cdot F' \cdot F - 2k(F'')^2 \cdot F + kF''(F')^2 = 0 \quad \dots\dots\dots(23')$$

$$k \equiv \eta_{co}/\eta_0$$

をうる。これは、解くことが可能で、その解は、

$$F = (F_3 \pm F_4 z)^2, \quad F_3, F_4: \text{定数} \quad \dots\dots\dots(24)$$

となる。速度は、式(5)より

$$v_r = \frac{(F_3 \pm F_4 z)^2}{r} \quad \dots\dots\dots(25)$$

となる。しかし、境界条件：式(20)：を満足するように、定数 F_3, F_4 をきめることはできない。これは、物理的に有意でない。

4 圧力分布—近似解

前節で明らかのように、式(9)は、ごくかぎられた場合にしか解かれえず、その解にもとづく円板に作用する圧力の状態は不明である。そこで、式(4)を近似的な解法により解き、圧力分布の算定式を導き、慣性や交差粘性の効果につき検討する。

4.1 圧力方程式

式(14.2)を z に関し積分すると、

$$p = p(r) - \eta_0 \frac{(n-1)}{r^{n+1}} \int (F')^n dz + \eta_{co} \frac{m+1}{r^{m+2}} \int F \cdot (F')^m dz + \frac{1}{2} \eta_{co} \frac{(F')^{m+1}}{r^{m+1}} \quad \dots\dots\dots (26)$$

となる。これを、 r に関し微分し、式(14.1)と等置し、整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} = & \rho \frac{F^2}{r^3} + \eta_0 \left[\frac{n}{r^n} (F')^{n-1} \cdot F'' + \frac{2(n-1)}{r^{n+2}} F \cdot (F')^{n-1} - \frac{(n-1)(n+1)}{r^{n+2}} \int (F')^n dz \right] \\ & - \frac{1}{2} \eta_{co} \left[\frac{(F')^{m+1} + 2mF \cdot (F')^{m-1} \cdot F''}{r^{m+2}} - \frac{2(m+1)(m+3)}{r^{m+4}} \int F \cdot (F')^m dz \right] \quad \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

をうる。これは、厳密に解くことはできない。

4.2 速度分布

本論文で考えた非ニュートン流体では、各種の粘性測定流れにおいて、交差粘性は、圧力には影響を及ぼすが速度には、形式上、影響を及ぼさないことが見出される⁽¹⁰⁾。すなわち、速度分布は、指数則流体のものとなる。しかし、前節で検討したように、平行円板間の放射流れでは、速度分布を決定できない。そこで、平行二平面間の流れ（二次元流れ）の速度分布を応用する。

指数則流体が平行二平面間を流れるときの速度分布は、

$$v_x = \frac{2n+1}{n+1} \frac{Q}{hb} \left[1 - \left(\frac{y}{h/2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad \dots\dots\dots (28)$$

で与えられる。ここで、 b は、流れ幅である。放射流れでは、

$$b \rightarrow 2\pi r, \quad y \rightarrow z, \quad v_x \rightarrow v_r$$

であるとする、式(28)より、

$$v_r = \frac{2n+1}{n+1} \frac{Q}{2\pi hr} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad \dots\dots\dots (29)$$

をうる。式(29)で、 $n=1$ とすると、ニュートン流体の放射流れの速度分布：式(29)と一致する。また、式(29)は連続の式：式(4)：を満足する。それゆえ、式(5)と組合せると、

$$F(z) = \frac{2n+1}{n+1} \frac{Q}{2\pi h} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad \dots\dots\dots (30)$$

をうる。式(30)の $F(z)$ として、これを利用する。

4.3 圧力分布

圧力方程式：式(27)に式(30)を代入し、整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} = & \rho \left(\frac{2n+1}{n+1} \right)^2 \left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^2 \frac{1}{r^3} \left[1 - \left(\frac{z}{h/2} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]^2 \\ & + \eta_0 \left[\left(-\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^n}{(h/2)^{n+1}} \cdot \frac{1}{r^n} - \frac{2n(n-1)}{n+1} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^n}{(h/2)^{\frac{n^2-1}{n}}} \left\{ z^{\frac{n-1}{n}} - \frac{1}{(h/2)^{\frac{n+1}{n}}} z^2 \right\} \frac{1}{r^{n+2}} \right. \\ & - \frac{(n^2-1)}{2} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^n}{(h/2)^{n+1}} z^2 \frac{1}{r^{n+2}} \left. \right] - \frac{1}{2} \eta_{co} \left[\frac{1}{r^{m+2}} \left\{ \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^{m+1}}{(h/2)^{\frac{(m+1)(n+1)}{n}}} z^{\frac{m+1}{n}} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2m}{n+1} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^{m+1}}{(h/2)^{\frac{m(n+1)}{n}}} \left\{ z^{\frac{m-n}{n}} - \frac{1}{(h/2)^{\frac{n+1}{n}}} z^{\frac{m+1}{n}} \right\} \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2n(m+1)(m+3)}{n+1} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^{m+1}}{(h/2)^{\frac{m(n+1)}{n}}} \frac{1}{r^{m+4}} \left\{ \frac{n}{m+n} z^{\frac{m+n}{n}} \right. \\
& \left. - \frac{n}{m+2n+1} \frac{1}{(h/2)^{\frac{n+1}{n}}} z^{\frac{m+2n+1}{n}} \right\} \quad \dots\dots\dots(31)
\end{aligned}$$

をうる。さらに、式(31)を、任意の r において、 $z:0 \sim h/2$ で積分（運動量方程式の導入）し、整理すると、

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dr} = & \rho \frac{2(2n+1)}{3n+2} \left(-\frac{Q}{2\pi h} \right)^2 \cdot \frac{1}{r^8} \\
& + \eta_0 \left[\left(-\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^n}{(h/2)^{\frac{n+1}{n}}} \frac{1}{r^n} - \frac{(n-1)(2n^2+5n-1)}{6(2n-1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^n}{(h/2)^{n-1}} \frac{1}{r^{n+2}} \right] \\
& - \frac{1}{2} \eta_{co} \left[-\frac{n}{m+n+1} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^{m+1}}{(h/2)^{\frac{m+1}{n}}} \cdot \frac{1}{r^{m+2}} \right. \\
& \left. + \frac{2n^3(m+1)(m+3)(2m+4n+1)}{(m+n)(m+2n)(m+2n+1)(m+3n+1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^{m+1}}{(h/2)^{m-1}} \frac{1}{r^{m+4}} \right] \\
& n \neq 1/2 \quad \dots\dots\dots(32)
\end{aligned}$$

をうる。ただし、積分に際し、 $n=1/2$ のとき、積分値が有限でなく項があるので、式(32)では、 $n \neq 1/2$ とし、以後、 $n=1/2$ の場合を除くことにする。式(32)を r につき積分すると、

$$\begin{aligned}
p(r) = & p_0 - \frac{\rho}{2} \frac{2(2n+1)}{3n+2} \left(\frac{Q}{2\pi hr} \right)^2 \\
& + \eta_0 \left[-\frac{1}{(n-1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{\left(\frac{Q}{2\pi hr} \right)^n}{(h/2)^n} \frac{r}{h/2} + \frac{(n-1)(2n^2+5n-1)}{6(n+1)(2n-1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{\left(\frac{Q}{2\pi hr} \right)^n}{(h/2)^n} \frac{h/2}{r} \right] \\
& - \frac{1}{2} \eta_{co} \left[\frac{n}{(m+1)(m+n+1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi hr} \right)^{m+1}}{(h/2)^{\frac{m+1}{n}}} \right. \\
& \left. - \frac{2n^3(m+1)(2m+4n+1)}{(m+n)(m+2n)(m+2n+1)(m+3n+1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi hr} \right)^{m+1}}{(h/2)^{\frac{m+1}{n}}} \frac{(h/2)^2}{r^2} \right] \\
& p_0 : \text{定数} \quad n \neq 1 \quad \dots\dots\dots(33.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(r) = & p_0 - \frac{\rho}{2} \cdot \frac{6}{5} \left(\frac{Q}{2\pi hr} \right)^2 + \eta_0 \left[-3 \frac{Q}{(h/2)^2} \ln r \right] \\
& - \frac{1}{2} \eta_{co} \left[\frac{(-3)^{m+1}}{(m+1)(m+2)} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi hr} \right)^{m+1}}{(h/2)^{\frac{m+1}{n}}} - \frac{2(2m+5)(-3)^{m+1}}{(m+2)(m+3)(m+4)} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi hr} \right)^{m+1}}{(h/2)^{\frac{m+1}{n}}} \frac{(h/2)^2}{r^2} \right] \\
& p_0 : \text{定数} \quad n=1 \quad \dots\dots\dots(33.2)
\end{aligned}$$

をうる。

圧力は式(30), (31), (33)より、

$$\begin{aligned}
p = & p'_0 - \frac{\rho}{2} \frac{2(2n+1)}{3n+2} \left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^2 \cdot \frac{1}{r^2} \\
& + \eta_0 \left[-\frac{1}{(n-1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^n}{(h/2)^{\frac{n+1}{n}}} \frac{1}{r^{n-1}} + \frac{(n-1)(2n^2+5n-1)}{6(n+1)(2n-1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^n}{(h/2)^{n-1}} \frac{1}{r^{n+1}} \right. \\
& \left. - \frac{n-1}{2} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^n}{(h/2)^{\frac{n+1}{n}}} \frac{z^2}{r^{n+1}} \right] \\
& - \frac{1}{2} \eta_{co} \left[\frac{n}{(m+1)(m+n+1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^{m+1}}{(h/2)^{\frac{m+1}{n}}} \cdot \frac{1}{r^{m+1}} \right. \\
& \left. - \frac{2n^3(m+1)(2m+4n+1)}{(m+n)(m+2n)(m+2n+1)(m+3n+1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^{m+1}}{(h/2)^{m-1}} \frac{1}{r^{m+3}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^{m+1}}{(h/2)^{\frac{(m+1)(n+1)}{n}}} \frac{z^{\frac{m+1}{n}}}{r^{m+1}} + \frac{2n(m+1)}{(n+1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^{m+1}}{(h/2)^{\frac{m(n+1)}{n}}} \\
& \frac{1}{r^{m+3}} \left\{ \frac{n}{m+n} z^{\frac{m+n}{n}} - \frac{n}{m+2n+1} \frac{1}{(h/2)^{\frac{n+1}{n}}} z^{\frac{m+2n+1}{n}} \right\} \} \dots\dots\dots(34.1)
\end{aligned}$$

p'_0 : 定数 $n \neq 1$

$$\begin{aligned}
p &= p'_0 - \frac{\rho}{2} \cdot \frac{6}{5} \left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^2 \cdot \frac{1}{r^2} + \eta_0 \left[-3 \frac{Q}{(h/2)^2} \ln r \right] \\
& - \frac{1}{2} \eta_{co} \left[\frac{(-3)^{m+1}}{(m+1)(m+2)} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^{m+1}}{(h/2)^{m+1}} \frac{1}{r^{m+1}} - \frac{2(2m+5)(-3)^{m+1}}{(m+2)(m+3)(m+4)} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^{m+1}}{(h/2)^{m-1}} \frac{1}{r^{m+3}} \right. \\
& - (-3)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^{m+1}}{(h/2)^{2(m+1)}} \frac{z^{m+1}}{r^{m+1}} + (m+1)(-3)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^{m+1}}{(h/2)^{2m}} \frac{1}{r^{m+3}} \left\{ \frac{1}{m+1} z^{m+1} \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{m+3} \frac{1}{(h/2)^2} z^{m+3} \right\} \right] \dots\dots\dots(34.2) \\
& p'_0: \text{定数 } n=1
\end{aligned}$$

となる。定数 p'_0 を $r=r_0$ で $p=p_0$ より決定すると、圧力分布は、

$$\begin{aligned}
p_0 - p &= -\frac{\rho}{2} \cdot \frac{2(2n+1)}{(3n+2)} \left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^2 \left[\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right] \\
& + \eta_0 \left[-\frac{1}{(n-1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^n}{(h/2)^{n+1}} \left\{ \frac{1}{r_0^{n+1}} - \frac{1}{r^{n+1}} \right\} \right. \\
& + \frac{(n-1)(2n^2+5n-1)}{6(n+1)(2n-1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^n}{(h/2)^{n-1}} \left\{ \frac{1}{r_0^{n+1}} - \frac{1}{r^{n+1}} \right\} \\
& \left. - \frac{n-1}{2} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^n}{(h/2)^{n+1}} \left\{ \frac{1}{r_0^{n+1}} - \frac{1}{r^{n+1}} \right\} z^2 \right] \\
& - \frac{1}{2} \eta_{co} \left[\frac{n}{(m+1)(m+n+1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^{m+1}}{(h/2)^{m+1}} \left\{ \frac{1}{r_0^{m+1}} - \frac{1}{r^{m+1}} \right\} \right. \\
& - \frac{2n^3(m+1)(2m+4n+1)}{(m+n)(m+2n)(m+2n+1)(m+3n+1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^{m+1}}{(h/2)^{m-1}} \left\{ \frac{1}{r_0^{m+3}} - \frac{1}{r^{m+3}} \right\} \\
& - \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^{m+1}}{(h/2)^{\frac{(m+1)(n+1)}{n}}} \left\{ \frac{1}{r_0^{m+1}} - \frac{1}{r^{m+1}} \right\} z^{\frac{m+n}{n}} \\
& + \frac{2n(m+1)}{(n+1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^{m+1}}{(h/2)^{\frac{m(n+1)}{n}}} \left\{ \frac{1}{r_0^{m+3}} - \frac{1}{r^{m+3}} \right\} \left\{ \frac{n}{m+n} z^{\frac{m+n}{n}} \right. \\
& \left. \left. - \frac{n}{m+2n+1} \frac{1}{(h/2)^{\frac{n+1}{n}}} z^{\frac{m+2n+1}{n}} \right\} \right] \dots\dots\dots(35.1) \\
& n \neq 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_0 - p &= -\frac{\rho}{2} \cdot \frac{6}{5} \left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^2 \left[\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} \right] + \eta_0 \left[-3 \frac{Q}{(h/2)^2} \ln \frac{r_0}{r} \right] \\
& - \frac{1}{2} \eta_{co} \left[\frac{(-3)^{m+1}}{(m+1)(m+2)} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^{m+1}}{(h/2)^{m+1}} \left\{ \frac{1}{r_0^{m+1}} - \frac{1}{r^{m+1}} \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2(2m+5)(-3)^{m+1}}{(m+2)(m+3)(m+4)} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h}\right)^{m+1}}{(h/2)^{m-1}} \left\{ \frac{1}{r_o^{m+3}} - \frac{1}{r^{m+3}} \right\} - (-3)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h}\right)^{m+1}}{(h/2)^{2(m+1)}} \left\{ \frac{1}{r_o^{m+1}} - \frac{1}{r^{m+1}} \right\} \\
& + (m+1)(-3)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h}\right)^{m+1}}{(h/2)^{2m}} \left\{ \frac{1}{r_o^{m+3}} - \frac{1}{r^{m+3}} \right\} \left\{ \frac{1}{m+1} z^{m+1} - \frac{1}{m+3} \frac{1}{(h/2)^2} z^{m+3} \right\} \\
& n=1 \quad \dots\dots\dots(35.2)
\end{aligned}$$

となる。円板に生ずる圧力分布は、式(35)で、 $z=h/2$ とすればよく、

$$\begin{aligned}
p_o - p]_{z=h/2} & \equiv (p_o - p)w \\
& = -\frac{\rho}{2} \cdot \frac{2(2n+1)}{(3n+2)} \left(\frac{Q}{2\pi h}\right)^2 \left[\frac{1}{r_o^2} - \frac{1}{r^2} \right] \\
& + \eta_o \left[-\frac{1}{(n-1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h}\right)^n}{(h/2)^{n+1}} \left\{ \frac{1}{r_o^{n-1}} - \frac{1}{r^{n-1}} \right\} \right. \\
& - \frac{(n-1)^2(2n+1)}{3(n+1)(2n-1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h}\right)^n}{(h/2)^{n-1}} \left\{ \frac{1}{r_o^{n+1}} - \frac{1}{r^{n+1}} \right\} \Big] \\
& - \frac{1}{2} \eta_{co} \left[-\frac{m^2+mn+2m+1}{(m+1)(m+n+1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h}\right)^{m+1}}{(h/2)^{m+1}} \left\{ \frac{1}{r_o^{m+1}} - \frac{1}{r^{m+1}} \right\} \right. \\
& + \frac{2n^2(m+1)}{(m+2n)(m+3n+1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h}\right)^{m+1}}{(h/2)^{m-1}} \left\{ \frac{1}{r_o^{m+3}} - \frac{1}{r^{m+3}} \right\} \Big] \\
& n \neq 1 \quad \dots\dots\dots(36.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_o - p]_{z=h/2} & \equiv (p_o - p)w \\
& = -\frac{\rho}{2} \cdot \frac{6}{5} \left(\frac{Q}{2\pi h}\right)^2 \left[\frac{1}{r_o^2} - \frac{1}{r^2} \right] + \eta_o \left[-3 \frac{\frac{Q}{2\pi h}}{(h/2)^2} \ln \frac{r_o}{r} \right] \\
& - \frac{1}{2} \eta_{co} \left[-\frac{m^2+3m+1}{(m+1)(m+2)} (-3)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h}\right)^{m+1}}{(h/2)^{m+1}} \left\{ \frac{1}{r_o^{m+1}} - \frac{1}{r^{m+1}} \right\} \right. \\
& + \frac{2(m+1)(-3)^{m+1}}{(m+2)(m+4)} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h}\right)^{m+1}}{(h/2)^{m-1}} \left\{ \frac{1}{r_o^{m+3}} - \frac{1}{r^{m+3}} \right\} \Big] \\
& n=1 \quad \dots\dots\dots(36.2)
\end{aligned}$$

である。

4・4 数値例による検討

今、無次元数を導入し、整理すると、無次元圧力分布は、式(36)より、

$$\begin{aligned}
\frac{(p_o - p)w}{\frac{\rho}{2} V_o^2} & = -K_I [1 - R_o^2] \\
& + \frac{1}{R_e^*} \left[\left[-\frac{2}{(n-1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{1}{L_o} \left\{ 1 - R_o^{n-1} \right\} - \frac{2(n-1)^2(2n+1)}{3(n+1)(2n-1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^n L_o \left\{ 1 - R_o^{n+1} \right\} \right] \right. \\
& - R_e^* \left[-\frac{m^2+mn+2m+1}{(m+1)(m+n+1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^{m+1} \left\{ 1 - R_o^{m+1} \right\} \right. \\
& + \frac{2n^2(m+1)}{(m+2n)(m+3n+1)} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^{m+1} L_o^2 \left\{ 1 - R_o^{m+3} \right\} \Big] \Big] \\
& n \neq 1 \quad \dots\dots\dots(37.1) \\
\frac{(p_o - p)w}{\frac{\rho}{2} V_o^2} & = -\frac{6}{5} [1 - R_o^2] \\
& + \frac{1}{R_e^*} \left[-\frac{6}{L_o} \ln R_o - R_e^* \left[-\frac{m^2+3m+1}{(m+1)(m+2)} (-3)^{m+1} \left\{ 1 - R_o^{m+1} \right\} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{2(m+1)}{(m+2)(m+4)} (-3)^{m+1} L_o^2 \left\{ 1 - R_o^{m+3} \right\} \Big] \Big] \quad \dots\dots\dots(37.2)$$

$n=1$

ここで,

$$K_I \equiv \frac{2(2n+1)}{3n+2}, \quad R_e^* \equiv \frac{\rho V_o^{2-n} (h/2)^n}{\eta_o}, \quad R_R^* \equiv \frac{\eta_{co}}{\eta_o} \left(\frac{V_o}{h/2} \right)^{1-n+m}$$

$$V_o \equiv Q/2\pi h r_o, \quad L_o \equiv \frac{h}{2} / r_o, \quad R_o \equiv r_o/r$$

K_I : 慣性効果係数

R_R^* : ライナー数

L_o : 無次元間隙

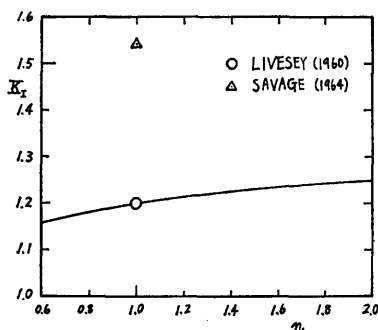


図2 $K_I \sim n$

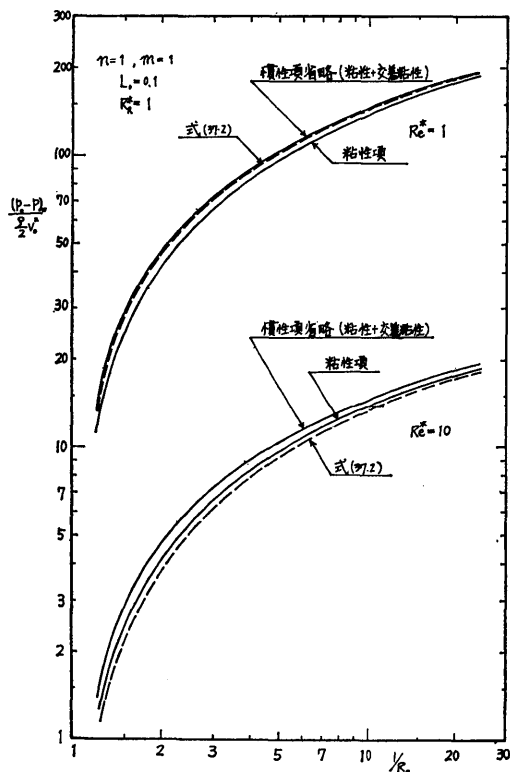


図3 $\frac{(p_o - p_w)}{\frac{\rho}{2} V_o^2} \sim 1/R_o [R_e^*: 1, 10]$

R_e^* : レイノルズ数

V_o : 流入平均流速

R_o : 無次元半径距離

となる。式(37)の数値計算に際しては、 $n=1$, $m=1$ での挙動に留意して、 $(-1)^n = (-1)^m = -1$ とした。

まず、慣性効果係数 K_I の非ニュートン指数 n による変化の状態を、図2に示す。 K_I は、 n の値の増加と共に増大し、 $n=1$ においては、Liveseyの理論値⁽⁴⁾と一致するが、Savageの理論値⁽⁵⁾よりはかなり小さい(その割合は、7/9)。

次に、 $n=1$, $m=1$ の場合の数値計算結果を、図3と図4に示した。図3は、レイノルズ数による差異を示したもので、 R_e^* が1程度以下になると慣性効果は無視しうる程度であるが、 $R_e^*=10$ では、かなりの影響をもつようになることがわかる。図4は、ライナー数による影響を示したもので、 R_R^* の増加と共に圧力分布の水準は高くなる (p_o は一定値であるゆえ、 p は低くなる)。これらより、圧力差 $(p_o - p_w)$ は、慣性効果により低下し、交差粘性効果により上昇すること

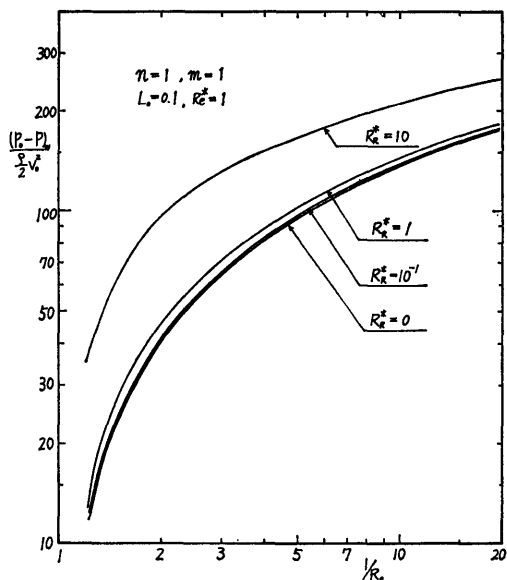


図4 $\frac{(p_o - p_w)}{\frac{\rho}{2} V_o^2} \sim 1/R_o [R_R^*: 0, 10^{-1}, 1, 10]$

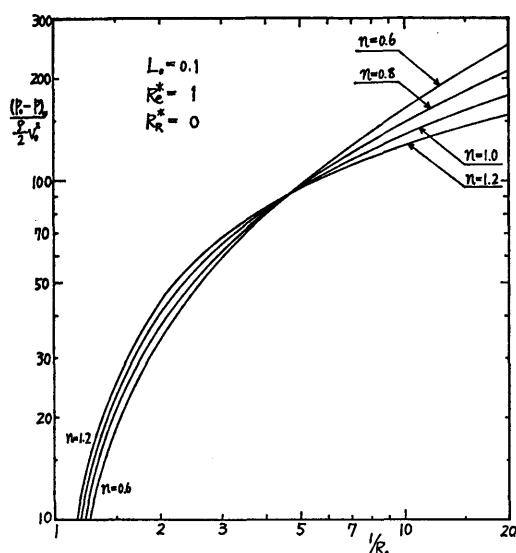


図5 $\frac{(p_0 - p_w)}{\frac{\rho}{2} V_0^2} \sim 1/R_0 [R_R^* = 0, n: 0.6 \sim 1.2]$

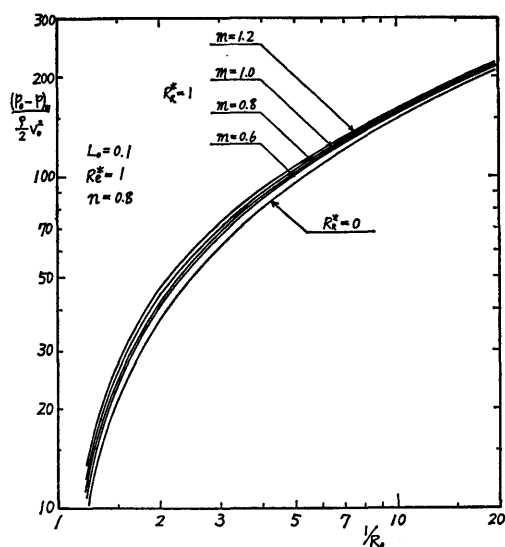


図7 $\frac{(p_0 - p_w)}{\frac{\rho}{2} V_0^2} \sim 1/R_0 [n = 0.8, m: 0.6 \sim 1.2]$

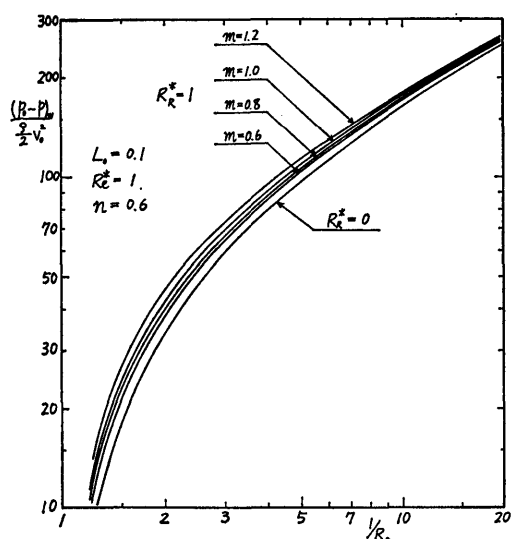


図6 $\frac{(p_0 - p_w)}{\frac{\rho}{2} V_0^2} \sim 1/R_0 [n = 0.6, m: 0.6 \sim 1.2]$

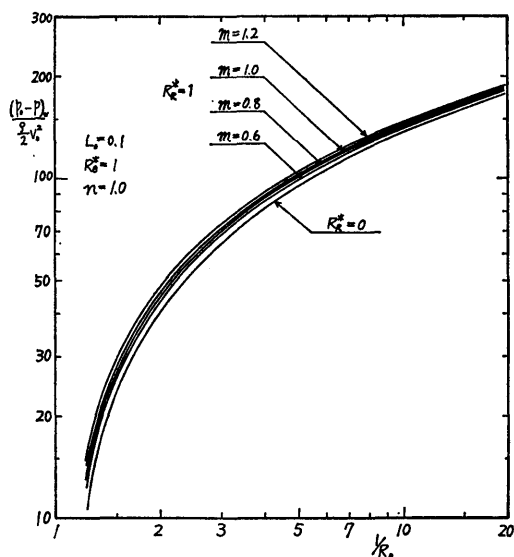


図8 $\frac{(p_0 - p_w)}{\frac{\rho}{2} V_0^2} \sim 1/R_0 [n = 1.0, m: 0.6 \sim 1.2]$

が見出される。

さらに、指数則流体の場合 ($R_R^* = 0$) の非ニュートン指数 n の変化による圧力分布の状態をしらべたのが、図5である。流入口近傍では、圧力差は、 n の増加と共に高くなるが、この関係は、ある半径位置をすぎると逆転する ($R_R^* = 1$ では $R_0 \approx 0.22$)。図6～図9は、 $n = 0.6, 0.8, 1.0, 1.2$ 、における交差粘性指数 m の変化による影響を図示したもので、圧力差は m の

増加と共に高くなるが、その効果は、あまり著しくない。これらの図には、比較のため、 $R_R^* = 0$ の結果も併記した。 $R_R^* = 0$ と $R_R^* = 1$ では、交差粘性効果のため、後者の場合の方が圧力分布は高い。

4・5 圧力と応力

応力成分は、一般に、

$$S_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad \dots\dots\dots(38)$$

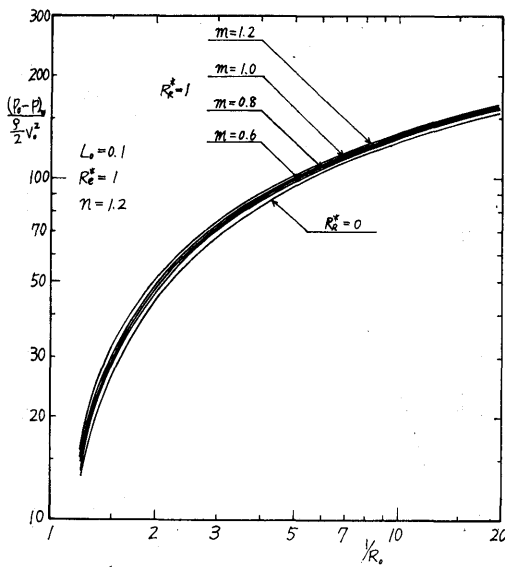


図9 $\frac{(p_0 - p_w)}{\frac{\rho}{2} V_0^2} \sim 1/R_0 [n=1.2, m:0.6 \sim 1.2]$

とあらわされ、Reiner-Rivlin 流体では、法線応力 S_{ii} と圧力 p は一致しない（偏差応力 τ_{ii} が零とはならない）。このため、円板に圧力測定器（マンメータ、ブルドン管など）を設置した場合には、応力 $[S_{zz}]_{z=h/2}$ が観測される。式(11), (29), (36)より、

$$[S_{zz}]_{z=h/2} = [-p + \tau_{zz}]_{z=h/2} = [-p]_{z=h/2} + \frac{1}{2} \eta_{co} \left(-\frac{2n+1}{n} \right)^{m+1} \frac{\left(\frac{Q}{2\pi h} \right)^{m+1}}{(h/2)^{m+1}} \frac{1}{r^{m+1}} \quad \dots\dots\dots (39)$$

この式で、右辺の第二項が応力と圧力の差異をあら

わしている。

5 結 論

非ニュートン流体（Reiner-Rivlinの指数形モデル）が、平行円板間を層流状態で放射流れ（ $v_\theta = v_z = 0$ と仮定）するとき、その流れ場は、特別な場合をのぞき、厳密には解明しえないことを明らかにした。さらに、圧力分布に関し、運動量方程式にもとづく近似解析をこころみ、円板に作用する圧力は、主として、粘性項により支配されるが、その圧力分布は、慣性効果により低減し、交差粘性効果により高増することを見出した。

なお、レイノルズ数が小さく、ライナー数が大きい状態で非ニュートン流体の流れ測定をおこなえば交差粘性効果の算定（レオメータとしての応用）も可能であると推定される。

おわりに、本研究の過程において、種々御教示いただいた東京都立大学加藤宏助教授に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) L. Gumbel, Z. techn. Physik., 1. (1920) 72.
- 2) 村田, 機械学会論文集, 18. (昭27) 25.
- 3) H. W. Woolard, J. Appl. Mech., 24. (1957) 9.
- 4) J. L. Livesey, Int. J. Mech. Sci., 1. (1960) 84.
- 5) S. B. Savage, J. Appl. Mech., 31. (1964) 594.
- 6) 石沢, 機械学会論文集, 30 (昭39) 1301
- 7) B. E. Boyack &, Trans. ASME., 92-D, (1970) 662.
- 8) W. H. Schwarz &, Chem. Eng. Sci., 24. (1969) 399.
- 9) R. B. Bird &, "Transport Phenomena" John Wiley & Sons., (1960).
- 10) 立花, 未発表.